

Research Reports of the Research Institute  
of Industrial Safety, RIIS-RR-92, 1993  
UDC 539.42:519.67:519.245

## AFOSM 法と重み付きモンテカルロ法を併用した 構造物の破壊確率評価システムの開発

佐々木哲也\*

### Development of a General Purpose Structural Reliability Analysis Code Jointly Based on the AFOSM Method and the Monte Carlo Simulation with Importance Sampling

by Tetsuya SASAKI\*

*Abstract;* With the increase of complex engineering systems, structural reliability has become a major consideration in the design of durable machines and structures. In general, structural reliability analysis requires the failure probability of the structural component. However, the exact solution of the failure probability requires the calculation of a multi-dimensional integral which often needs large memory and computing time. For this reason, the availability of a computer code for calculating the failure probability is important for practical use of reliability methods.

In this study, an efficient and accurate computer code for calculating the failure probability of the structural component is developed. The developed code is jointly based on the advanced first order second moment (AFOSM) method and the Monte Carlo simulation technique with importance sampling. The augmented Lagrangian method and the DFP method, which are known as the nonlinear optimization procedures, are utilized for calculating the coordinates of the design point. Then the failure probability is evaluated using the importance sampling technique weighted around the design point.

A simple reliability problem is solved to demonstrate the accuracy and the efficiency of the developed computer code. The high performance of the developed code is confirmed.

*Keywords;* Structural Reliability, Failure Probability, Advanced First Order Second Moment Method, Monte Carlo Simulation, Importance Sampling

#### 1. 緒 言

現在産業界で使用されている機械や構造物の強度設計に際しては、作用する荷重や材料の強度特性などは確定値とみなしている。しかし、実際の荷重や材料強度はいずれもある不確定性を有しているため、安全率等の係数を用いて強度上の余裕を持たせるこ

とによって、この不確定性に対処している。したがって、安全率の大きさはその機械・構造物の破壊事故に対する安全裕度に極めて大きな影響を及ぼすことになるが、従来は同種の機械・構造物に関する過去の実績や設計者の経験・主観に基づいて安全率の大きさが決定されてきたのが現状である。

しかし、近年、機械・構造物は著しく大型化しており、航空機産業、原子力産業の分野等では特に複雑

\*機械研究部 Mechanical Safety Research Division

化・高度化が進んでいる。このような機械・構造物にひとたび破壊事故が発生すると重大な災害をもたらすため、もはや従来の主観や経験に基づく設計は許されず、信頼性を定量的に評価した設計を行なう必要が生じてきている。一方、工業的には経済性の問題も無視することはできない。通常、安全性を高めると経済性は低下するため、安全性と経済性を高度にバランスさせた設計が求められることになる。

このような要求に答えるために、近年、荷重や材料強度の不確定性を確率論的に取り扱い、信頼性を定量的に評価する信頼性設計法が注目されている。実際に信頼性設計を行なうためには、問題とする破壊モードに対する破壊条件式とその破壊に関与する確率変数の統計的性質から破壊確率を求める必要がある。しかし、数学的には破壊確率は多重積分によって定義されるため、その解析的評価は事実上不可能であり、従来はモンテカルロシミュレーションや数値積分などの数値解析法によって破壊確率の評価が行なわれていた。このため、変数が多くなると実用的な計算時間内に精度良く破壊確率を計算することは困難であった。そこで、本研究ではAFOSM法と重み付きモンテカルロ法を組み合わせることにより、正確な破壊確率を効率的に評価することが可能なシステムを開発した。

## 2. 破壊確率の計算と重み付きモンテカルロ法

### 2.1 破壊確率の計算法

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が破壊に関与する確率変数であるとき、対象物の破損モードに対する破損条件式（限界状態関数）を

$$G(\mathbf{X}) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0 \quad (1)$$

とする。このとき、 $f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $x_1, x_2, \dots, x_n$ の結合確率密度関数とすれば、破壊確率 $P_f$ は

$$P_f = \int \int \dots \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

で定義される<sup>1)</sup>。

通常、式(2)を解析的に評価することはできないから、数値計算が必要とされる。数値計算の手法としては次の2通りの方法がある。

#### 1. 数値積分法

#### 2. モンテカルロ法

1. の数値積分法は式(2)を離散化して数値積分を行なう方法であるが、この方法では変数の数が多くなると必要とされる主記憶空間の大きさと計算時間はいずれも飛躍的に増大してしまい、多次元化が困難である。これに対して、2. のモンテカルロ法は式(2)を直接評価するのではなく、疑似乱数を用いて確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の実現値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の $N$ 個のペアを発生させ、そのうち $M$ 個が破損条件を満足させた場合に、

$$P_f = \frac{M}{N} \quad (3)$$

によって破壊確率を評価する方法である。モンテカルロ法は数値積分法と比較して多次元化が容易であるが、通常、破壊確率は極めて小さい値となるため、その値を精度良く推定するためには非常に多くの乱数を発生させる必要があり、計算時間や疑似乱数の周期性が問題となってしまう。そこで、少数の乱数で精度の良い値を得るための手段として、層別サンプリングや重み付きサンプリング等の手法<sup>2)</sup>が考案されているが、本研究では特に重み付きサンプリングによるモンテカルロ法、すなわち、重み付きモンテカルロ法を用いることにする。

### 2.2 重み付きモンテカルロ法の原理<sup>3)</sup>

通常のモンテカルロ法では、確率変数ベクトル $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ の関数

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{for } G(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0, & \text{for } G(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (4)$$

を用いて、

$$P_f = \int_{\text{all } \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5)$$

によって破壊確率を評価する。式(5)は、 $f(\mathbf{x})$ なる確率密度関数を有する乱数 $\mathbf{x}$ を発生させて、 $\phi(\mathbf{x})$ の平均値を求めていることに相当するが、大部分の $\mathbf{x}$ に対して $\phi(\mathbf{x}) = 0$ となってしまうので極めて効率が悪い。そこで、重み確率密度関数 $h(\mathbf{x})$ を導入し、式(5)を

$$P_f = \int_{\text{all } \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6)$$

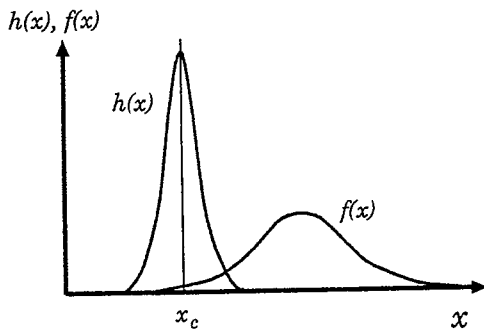


Fig. 1 Illustration of the weighted probability density function  
重み確率密度関数の例

のように変形する。式 (6) では、 $h(x)$  なる確率密度関数を有する乱数  $x$  を発生させて、 $\phi(x)f(x)/h(x)$  の平均値を求めていることになり、 $h(x)$  を適当に選ぶことによって効率を飛躍的に上げることができる。このような手法を重み付きモンテカルロ法と呼ぶ。

通常、重み確率密度関数  $h(x)$  は、式 (1) を満たしやすい  $\mathbf{X}$  の値で密度が高くなるように選ぶ。例えば、限界状態関数が  $g(x) = x_c - x \leq 0$  であるような 1 次元問題の場合には、重み確率密度関数  $h(x)$  は Fig. 1 のように選ばばよい。なお、重み付きモンテカルロ法の計算効率に大きな影響を及ぼすのは重み確率密度関数の平均点であり、その形状はあまり影響を及ぼさないので、重み確率密度関数は元の確率密度関数  $f(x)$  を並行移動させたものを用いることも多い。

### 2.3 AFOSM 法による重み確率密度関数の平均点の決定法

前述の例では、重み確率密度関数の平均点を容易に決定することができたが、多次元問題に対して、一般性のある形で重み確率密度関数の平均点を決定することは必ずしも簡単ではない。そこで、AFOSM (Advanced First Order Second Moment) 法の重要な概念である設計点 (Design Point) を重み確率密度関数の平均点として採用することが Schuëller らによって提案されている<sup>4)</sup>。

設計点を求めるためには、破損に関与する確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を標準正規確率変数  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  に変換して考える。いま、このように変換された  $n$  次元の標準正規確率空間を  $\mathbf{z}$  とし、 $\mathbf{z}$  上での限界状態関数を  $g(\mathbf{z}) \leq 0$  とする。設計点は超曲面  $g(\mathbf{z}) = 0$  上で原点までの距離が最短となるような点として定義さ

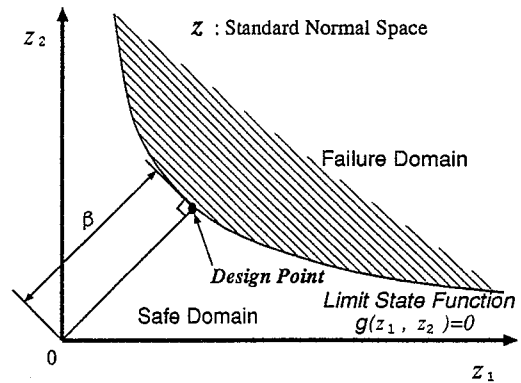


Fig. 2 General idea of the reliability index and the design point  
信頼性指標と設計点の概念図

れる。設計点の概念を 2 次元の場合について、Fig. 2 に示す。

実際に設計点を求めることは、

$$d(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

$$\text{Subject to } g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \quad (8)$$

なる非線形最適化問題を解くことに帰着される。

なお、標準正規確率空間の原点は各確率変数の平均値に一致するから、原点から超曲面  $g(\mathbf{z}) = 0$  までの最短距離は、破損状態が破損に関与する確率変数の平均的な状態からどの程度離れているかの目安となる。そこで、この最短距離を信頼性指標  $\beta$  と呼び、信頼性設計の指標とすることが Hasofer と Lind<sup>5)</sup> によって提案されている。信頼性指標  $\beta$  は破損に関与する確率変数の分布形が不明であっても、平均値と標準偏差だけから算出することができるから、近年、実用的な信頼性評価法として  $\beta$  を用いる方法が注目されている。本研究で開発したシステムでは、設計点を求める際に  $\beta$  も求めることができる。

## 3. 開発した破壊確率評価システムの概要

### 3.1 全体の構成

開発した破壊確率評価システムの全体構成を Fig. 3 に示す。ユーザが入力する必要があるのは、問題にしている破壊モードについての限界状態関数と確率変数  $\mathbf{X}$  の統計的特性、すなわち分布形、平均値、標準偏差、相関係数等である。現在取り扱える分布形

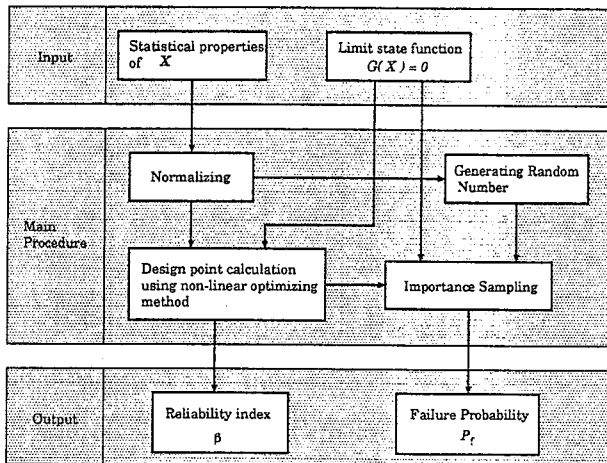


Fig. 3 Schematic diagram of the developed system  
開発したシステムの全体構成

は、正規分布、一様分布、指数分布、Rayleigh 分布、対数正規分布、最大値の第 1 種漸近分布、最大値の第 2 種漸近分布、Γ分布、最小値の第 1 種漸近分布、Weibull 分布の 10 種類である。

実際の解析は以下の順序で行なわれる。

1. 解析条件を入力する。
2. 確率変数ベクトル  $\mathbf{X}$  が非正規の場合には、Nataf モデル<sup>6)</sup>によって標準正規確率変数ベクトル  $\mathbf{Y}$  に変換する。
3.  $\mathbf{Y}$  が相関を有する場合には、無相関の標準正規確率変数ベクトル  $\mathbf{Z}$  に変換する。
4. 非線形最適化手法によって設計点の探索を行なう。同時に、信頼性指標  $\beta$  を計算する。
5. 設計点を重み確率密度関数の平均点として重み付きモンテカルロ・シミュレーションを行ない、破壊確率  $P_f$  を算出する。
6. 解析結果を出力する。

### 3.2 各処理部の詳細

次に、各処理部の詳細について述べる。

#### 3.2.1 Nataf モデルによる非正規確率変数の正規化<sup>6)</sup>

正規分布以外の確率分布を有する確率変数  $X_i$  は、次式の Nataf モデルによって標準正規確率変数に変換する。

$$Y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

ただし、 $\Phi^{-1}(\cdot)$  は標準正規分布関数の逆関数を表し、 $F_{X_i}(\cdot)$  は  $X_i$  の確率分布関数を表す。

Nataf モデルでは、 $\mathbf{Y}$  が  $n$  次元正規分布である場合に、 $\mathbf{X}$  の結合確率密度関数を次のように求めることができる。

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(x_1)f_{x_2}(x_2)\cdots f_{x_n}(x_n) \frac{\varphi_n(\mathbf{y}, \mathbf{R}')}{\varphi(y_1)\varphi(y_2)\cdots\varphi(y_n)} \quad (10)$$

ここで、 $\varphi(\cdot)$  は 1 次元の標準正規確率密度関数であり、 $\varphi_n(\mathbf{y}, \mathbf{R}')$  は  $\rho'_{ij}$  を要素とする相関行列  $\mathbf{R}'$  を有する  $n$  次元標準正規密度関数である。ただし、 $\rho'_{ij}$  は  $X_i$  と  $X_j$  の相関係数  $\rho_{ij}$  を用いて、

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left( \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \varphi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dy_i dy_j \quad (11)$$

で定義される。したがって、 $\rho'_{ij}$  を求めるためには式 (11) を用いて繰り返し積分を行なう必要があるが、本研究では Liu らの簡易評価式<sup>7)</sup>によって求めている。

#### 3.2.2 相関のある確率変数ベクトルの無相関化<sup>8)</sup>

正規確率変数ベクトル  $\mathbf{Y}$  の共分散行列  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$  の固有ベクトルから変換行列  $\mathbf{A}$  を求め、

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \quad (12)$$

によって相関のない確率変数ベクトル  $\mathbf{Z}'$  に変換する。ただし、 $\mathbf{A}^T$  は変換行列  $\mathbf{A}$  の転置行列を表す。そして、 $\mathbf{Z}'$  を標準化して無相関の標準正規確率変数ベクトル  $\mathbf{Z}$  を求める。

#### 3.2.3 非線形最適化手法による設計点の探索法

式 (7),(8) に示されるような制約条件のある非線形最適化問題を解く方法としては、ペナルティ法、バリア法、増大 Lagrange 関数法等のように、制約条件付き問題を制約条件なし問題に変換して解く方法が一般的である<sup>9)</sup>。本研究では収束性と安定性を考慮して、これらの手法の中から、増大 Lagrange 関数法を採用した。

増大 Lagrange 関数法では、式 (7),(8) の局所最適解を求めることは、増大 Lagrange 関数

$$L_a(\mathbf{u}, \lambda) = d(\mathbf{u}) + \lambda g(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} r \{g(\mathbf{u})\}^2 \quad (13)$$

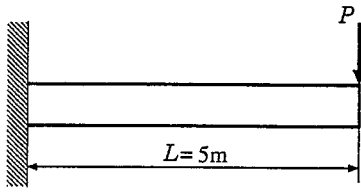


Fig. 4 Cantilever beam subjected to concentrated load  
端部に集中荷重を受ける片持ち梁

を最小化することに帰着される。ただし、 $\lambda$ は Lagrange 定数、 $r$ は十分大きな有限の正定数である。これは制約条件のない最適化問題であり、本研究では、準 Newton 法の一つである DFP (Davidon-Fletcher-Powell) 法<sup>10)</sup>によって解いている。ただし、通常は Lagrange 定数 $\lambda$ 、十分大きな有限の正定数 $r$ も不明であるから、適当な初期値 $\lambda^0, r^0$ を選んで、

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + r^k g(\mathbf{u}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\lambda^{k+1} = cr^k, \quad c > 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

によって更新する必要がある<sup>11)</sup>。

### 3.2.4 重み付きモンテカルロ法に適した疑似乱数の発生法

重み付きモンテカルロ法では比較的少数の疑似乱数で破壊確率を評価するため、特に疑似乱数の一様性は重要である。そこで、Bourgund らが提案しているアルゴリズム<sup>12)</sup>によって疑似乱数を発生させている。

### 3.3 その他

本システムの開発は富士通株式会社製のエンジニアリング・ワークステーション S-4/IX 上で行なったが、ソースコードは全て標準的な C 言語によって記述しており、特殊な組み込み関数は使用していないので、容易に異なるコンピュータに移植することが可能である。

また、作業用のメモリは動的に確保しているので、16ビット・パーソナルコンピュータ程度の主記憶空間でも比較的大きな問題を解くことが可能になっている。

## 4. 実際の解析例

ここでは、本研究で開発した破壊確率評価システムの簡単な実行例を示し、重み付きモンテカルロ法

の有効性等について考察する。

### 4.1 問題の設定

Fig. 4 に示すような集中荷重  $P$  を受ける片持ち梁を考える。この片持ち梁は曲げモーメントの最大値が限界モーメント  $M_f$  を越えた時に破壊するものとする。ここでは、簡単のため  $M_f, P$  を正規分布に従う確率変数、 $L$  を確定値と考え、以下のような平均値、標準偏差を有しているものとする。ただし、 $E[\cdot], \sigma[\cdot]$  はそれぞれ平均値、標準偏差を表す演算子である。

$$\begin{aligned} E[M_f] &= 20 \text{ kN} \cdot \text{m} & \sigma[M_f] &= 2.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ E[P] &= 2.0 \text{ kN} & \sigma[P] &= 0.5 \text{ kN} \\ E[L] &= 5.0 \text{ m} & \sigma[L] &= 0.0 \text{ m} \end{aligned}$$

このとき、この破損モードに対する限界状態関数は

$$G(M_f, P) = M_f - 5P \leq 0 \quad (16)$$

で表される。

### 4.2 解析結果

前節で設定した問題の破損曲面は、

$$Z_1 = \frac{M_f - E[M_f]}{\sigma[M_f]} \quad (17)$$

$$Z_2 = \frac{P - E[P]}{\sigma[P]} \quad (18)$$

のように  $M_f, P$  を標準正規化することにより、

$$g(Z_1, Z_2) = 4Z_1 - 5Z_2 + 20 = 0 \quad (19)$$

となる。式 (19) は直線を表しているから、原点からの距離が容易に計算でき、AFOSM 法の信頼性指標  $\beta$  が

$$\beta = \frac{20}{\sqrt{41}} \simeq 3.12 \quad (20)$$

のように求まる。そして、この  $\beta$  から破壊確率  $P_f$  の厳密解は

$$P_f = \Phi(-\beta) = 8.94 \times 10^{-4} \quad (21)$$

となる。

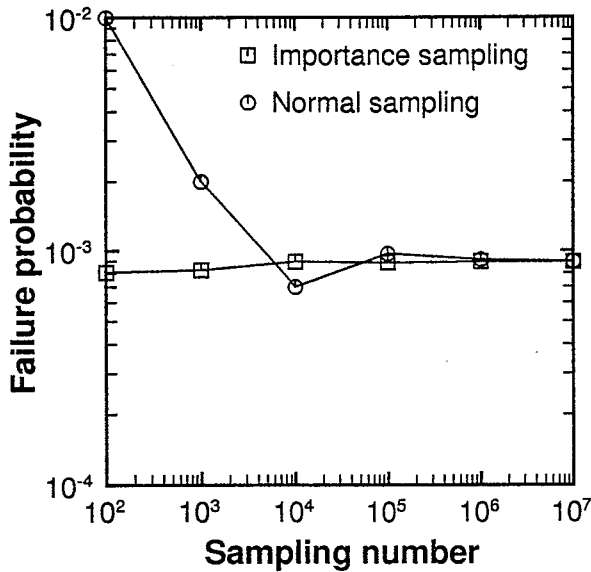


Fig. 5 Comparison of importance sampling and normal sampling  
重み付きモンテカルロ法と通常のモンテカルロ法の比較

これに対して、本研究で開発した重み付きモンテカルロ法による破壊確率の値と通常のモンテカルロ法による破壊確率の値をサンプリング数ごとに示したのが Fig. 5 である。重み付きモンテカルロ法によれば、通常のモンテカルロ法に比べてはるかに少ないサンプリング数で精度良く非常に小さい破壊確率が評価できることがわかる。

### 5. 結 論

本研究では、AFOSM 法と重み付きモンテカルロ法を併用することにより、機械・構造物の破壊確率を効率的に評価するための汎用システムを開発した。開発したシステムの特長は次の通りである。

- (1) 原則として、破壊に関与する確率変数の統計的性質と破損条件式（限界状態関数）が与えられれば、信頼性指標  $\beta$  と破壊確率  $P_f$  を評価可能である。
- (2) 破壊に関与する確率変数は無相関の正規変数に限定されず、相関を有する非正規変数に対しても解析が可能である。
- (3) AFOSM 法の設計点を重み確率密度関数の平均点とすることにより、客観的かつ合理的な重み確率密度関数を設定することが可能である。このように、AFOSM 法を利用するため、同時に

信頼性指標  $\beta$  も算出することができる。

- (4) 設計点の探索には、増大 Lagrange 関数法と DFP 法を組み合わせた非線形最適化手法を用いており、収束性、安定性に優れている。
- (5) 一様性に優れた疑似乱数発生アルゴリズムを採用することにより、重み付きモンテカルロ法の効率を増している。
- (6) 開発したシステムのソースコードは全て標準的な C 言語で記述されており、移植性に優れている。また、動的なメモリ管理を行なうことにより、少量の主記憶空間でも比較的大規模の問題を解くことが可能である。

(平成 5 年 4 月 30 日受理)

### 参 考 文 献

- 1) 市川昌弘, 構造信頼性工学, (1988), pp. 83-87, 培風館.
- 2) 津田孝夫, モンテカルロ法とシミュレーション, (1977), pp. 88-106, 培風館.
- 3) 岡村弘之・板垣 浩, 強度の統計的取り扱い, (1979), pp. 196-197, 培風館.
- 4) Schuëller, G.I. and Stix, R., A Critical Appraisal of Methods to Determine Failure Probabilities, Report 4-86 (1986), Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck.
- 5) Hasofer, A.M. and Lind, N., An Exact and Invariant First Order Reliability Format, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, 100-EM1 (1974), pp. 111-121.
- 6) Nataf, A., Determination des Distribution dont les Marges sont Donnees, Comptes Rendus de l'Academie des Scienss, Vol. 225 (1962), pp. 42-43.
- 7) Liu, P-L. and Kiureghian, A.D., Multivariate Distribution Models with Prescribed Marginals and Covariances, Probabilistic Engineering Mechanics, 1-2 (1986), pp. 105-112.
- 8) P. トフクリステンセン・M.J. ベーカー, 構造信頼性 — 理論と応用, (1986), pp.100-114, シュプリンガー・フェアラーク東京.
- 9) 坂和正敏, 非線形システムの最適化, (1986), pp. 248-252, 森北出版.

- 10) 渡辺 力・名取 亮・小国 力, Fortran 77 による数値計算ソフトウェア, (1989), pp. 243-246, 丸善.
- 11) 今野 浩・山下 浩, 非線形計画法, (1978), pp. 248-252, 日科技連.
- 12) Bourgund, U. and Bucher, C.G., Importance Sampling Procedure Using Design Point, Report 8-86 (1986), pp. 83-88, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck.